

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI
NAPOLI FEDERICO II



Facoltà di Ingegneria

Corso di Studi in Ingegneria Informatica

Elaborato finale in **Controlli automatici**

***Sincronizzazione di reti di sistemi
dinamici***

Anno Accademico 2011/2012

Candidato:

IPPOLITO PAOLO

matr. N46/000489

*Dedicato a chi in questi tre anni mi è sempre
stato vicino. A Rossella, la persona che amo,
ai miei genitori, alla mia famiglia, in particolare
a mia nonna, che hanno sempre creduto in me.
Un ringraziamento al prof. M. Di Bernardo per la
Sua disponibilità e professionalità.*

Indice

Introduzione	4
Capitolo 1. La Rete	6
1.1 Elementi	6
1.2 Indici	6
1.3 Matrici caratteristiche	7
1.4 Topologia	8
Capitolo 2. Sincronizzazione, stabilità e controllo di reti complesse	9
2.1 Sincronizzazione	9
2.1.1 Tipologie di sincronizzazione	10
2.1.2 Indici di sincronizzazione	11
2.2 Stabilità	13
2.2.1 Modello generale di rete	13
2.2.2 Analisi della stabilità dello stato sincrono e l'approccio Master Stability Function	14
2.3 Controllo	17
Capitolo 3. Simulazione della rete: Circuito di Chua	19
3.1 Circuito di Chua	19
3.1.1 Modello dimensionale e adimensionale	20
3.2 Circuiti di Chua accoppiati	24
3.3 Rete a 4 circuiti di Chua	29
3.3.1 Topologia A: globally connected	30
3.3.2 Topologia B: neighbor connected	31
3.3.3 Topologia C: one-to-all connected	31
3.3.4 Topologia D: neighbor connected-less-one-couple	32
3.3.5 Topologia E	33
3.3.6 Topologia F: globally connected-less-one-couple	34
3.3.7 Confronto tra le topologie	35
Conclusioni	36
Sviluppi futuri	
Bibliografia	37

Introduzione

Negli ultimi decenni ciò che sicuramente ha monopolizzato l'attenzione nel campo della ricerca è stato lo studio delle reti: quest'ultima infatti occupa un ruolo di rilievo non solo in ambito tecnologico, ma anche medico, economico, sociale, etc.

Una rete, per sua definizione, è un insieme di entità (oggetti, persone, etc.) interconnesse le una alle altre. Esempi di rete possono essere:

- Internet (rete di router e domini)
- World Wild Web (rete di siti web)
- Cervello (rete di neuroni)
- Organizzazioni (rete di persone)
- Economia globale (rete di economie nazionali a loro volta rete di mercati a loro volta rete di interazioni tra produttori e consumatori)

Una rete può essere rappresentata in termini matematici come un grafo. Un grafo è un'entità costituita da nodi ed archi: nodi rappresentano gli elementi costituenti della rete, mentre gli archi connettono coppie di nodi e rappresentano le relazioni di interconnessione tra gli stessi:[1]

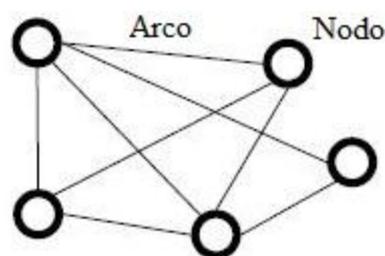


Figura 1: un semplice esempio di rete

Un grafo rappresenta la struttura della rete: essa è importante perché influenza il suo comportamento e la sua funzione. Quest'ultima inoltre può rendere relativamente

complessa la sua analisi, infatti possiamo avere le seguenti complicazioni:

- Può essere caratterizzata da un numero notevole di collegamenti;
- La sua topologia può cambiare dinamicamente;
- I pesi delle connessioni potrebbero essere differenti;
- I nodi potrebbero avere caratteristiche dinamiche non lineari;
- I nodi interagenti potrebbero avere caratteristiche dinamiche differenti;
- Queste complicazioni possono coesistere tra loro influenzandosi a vicenda;

Ciò che verrà trattato in questo elaborato è lo studio delle reti, in particolare ci focalizzeremo sulla sincronizzazione di reti di sistemi dinamici caotici non lineari.



Capitolo 1

La Rete

In questo capitolo verranno illustrati gli elementi che caratterizzano il modello di una rete, degli indici [1] ricavabili da essi e delle varie topologie che una rete può assumere

1.1 Elementi

Gli elementi che caratterizzano una rete sono :

- **Nodo (o vertice)** : è l'elemento principale del grafo, rappresenta il sistema dinamico singolo che interagisce con la rete.
- **Arco** : è l'elemento che interconnette due nodi e che determina la topologia della rete. Esso può essere *monodirezionale* (c'è un unico verso di interazione) o *bidirezionale* (non c'è verso d'interazione).
- **Grado** : parametro caratteristico di un nodo, esso indica il numero di archi connessi a quest'ultimo.
- **Componente di un nodo**: è l'insieme dei nodi raggiungibile partendo da esso tramite gli archi del grafo.
- **Percorso geodesico (o shortest path)**: è il percorso minimo tra i due nodi, inteso come somma dei pesi degli archi nel caso pesato, o come somma degli archi nel caso non pesato. Solitamente viene indicato come d_{ij} .
- **Diametro**: massima distanza geodesica presente nel grafo considerando tutte le coppie di nodi.

1.2 Indici

In questo paragrafo verranno introdotti gli indici che permettono di classificare le diverse topologie di rete. Non verrà approfondito molto l'argomento in quanto noi siamo interessati più ad un'analisi sistemistica delle reti che statistica.

Questi sono:

- **Distanza media**: L'indice più semplice che può essere considerato, esso rappresenta la media di tutti i percorsi geodesici della rete.
- **Coefficiente di clustering**: esso è la frazione delle coppie di vicini di un nodo che

sono esse stesse vicine tra loro [1], cioè rappresentano la densità di collegamenti tra nodi in una rete.

- **Degree Distribution:** esso rappresenta la possibilità che un nodo scelto casualmente abbia esattamente grado k .
- **Connettività:** una rete non diretta è detta *connessa* quando, scelti una qualsiasi coppia di nodi, esiste un percorso che li collega. Inoltre se il percorso è orientato la rete si dice *fortemente connessa*.

1.3 Matrici caratteristiche

Sfruttando la teoria matematica dei grafi, è possibile descrivere un grafo in maniera matriciale. Verranno ora di seguito presentate tre matrici che risultano essere vantaggiose nella descrizione di un grafo. Esse sono tutte di dimensione $n \times n$, dove n è il numero dei nodi.

- **Matrice di grado:** è una matrice diagonale avente come elemento d_{ii} il grado dell' i -esimo nodo. Viene solitamente indicata con D .
- **Matrice di adiacenza:** è una matrice, solitamente indicata con A , in cui il generico elemento a_{ij} indica il peso dell'arco che parte dal nodo i e arriva al nodo j (se non è presente alcun collegamento tra i due nodi il valore è nullo). Se la rete è bidirezionale la matrice sarà simmetrica. Se non ci sono *self-loop* (archi che partono da un nodo e terminano nello stesso) la diagonale è composta da valori nulli. Inoltre è semplice notare che l' i -esima riga rappresenta gli archi partenti dall' i -esimo nodo, mentre l' i -esima colonna rappresenta gli archi che terminano nell' i -esimo nodo.
- **Matrice Laplaciana:** questa matrice è definita come la differenza tra la matrice di grado e quella di adiacenza, cioè $L=D-A$. Essa è fondamentale in quanto nelle reti di sistemi dinamici è caratteristica del modello dinamico che caratterizza l'evoluzione dell'intera rete.[1] Essa presenta molte proprietà che verranno discusse in seguito, per ora ci limitiamo a notare che essa è simmetrica se la rete è bidirezionale. Inoltre questa matrice presenta sempre un autovalore $\lambda_1=0$ e un secondo autovalore λ_2 che determina gran parte delle proprietà dinamiche della

rete.

1.4 Topologie

In questo paragrafo verranno illustrate le principali topologie di rete di interesse nell'ambito scientifico e tecnologico.

- **Rete regolare:** E' una rete in cui tutti i nodi hanno lo stesso grado.
- **Reticolo:** E' una rete con un ordine negli archi ripetitivo.
- **Rete random:** è una rete la cui presenza o meno di un collegamento tra due nodi è ha probabilità p .
- **Rete small-world:** è un tipo di grafico matematico in cui la maggior parte dei nodi non sono vicini tra loro, ma essi possono essere raggiunti da ogni altro nodo con un piccolo numero di salti("hop").
- **Rete scale free:** è una rete in cui la distribuzione di grado segue una legge di tipo power-law: $P(k)=k^{-\gamma}$ con $\gamma > 1$.



Capitolo 2

Sincronizzazione, stabilità e controllo di reti complesse

Dopo aver introdotto dei concetti generali sulla rete, verranno ora introdotti i concetti di sincronizzazione, stabilità e controllo di una rete complessa.

In particolare parleremo di diversi tipi di sincronizzazione e vedremo, tramite il modello generale, la capacità dei singoli agenti di riuscire tramite l'interazione tra loro ad un processo di auto-organizzazione. Inoltre parleremo della Master Stability Function che ci permette di analizzare la stabilità dello stato sincrono, e infine affronteremo il problema del controllo nelle reti complesse (tramite pinning control) e dei problemi che ne derivano.

2.1 Sincronizzazione

Il termine sincrono deriva dal greco e nella traduzione diretta significa “condividere un tempo comune, accadere nello stesso tempo”.

La prima descrizione del fenomeno di sincronizzazione si deve con molta probabilità a Christiaan Huygens, che nel 1673 collegò due orologi a pendolo ad una trave e, a condizioni iniziali simili e a movimenti dei pendoli non molto dissimili, notò come essi sincronizzavano il loro moto oscillando insieme in fase o in opposizione di fase: Huygens diede una spiegazione qualitativa dell'effetto di mutua sincronizzazione osservando che l'oscillazione simile era data da un movimento non percettibile della trave (che svolgeva il ruolo di variabile di accoppiamento).

Negli ultimi decenni ad avere sempre un maggiore interesse della ricerca scientifica è la sincronizzazione delle reti complesse (con nodi che sono oscillatori caotici) : le applicazioni innumerevoli che si possono ottenere dallo studio della sincronizzazione vanno dalla cooperazione di gruppi di robot all'ottimizzazione della distribuzione di energia elettrica, dall'analisi e sintesi di cluster di proteine o altri reagenti biologici alle previsioni meteorologiche sempre più accurate.

2.1.1 Tipologie di sincronizzazione

Lo studio della sincronizzazione ha portato ad una classificazione di quest'ultima. Di

seguito verranno riportate le differenti tipologie di sincronizzazione:

- **Sincronizzazione completa:** si intende la perfetta coincidenza delle traiettorie sul piano delle fasi dei sistemi elementari identici costituenti la rete. Prendendo una rete di N sistemi identici, la condizione da soddisfare è la seguente:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_i - x_j\| = 0 \text{ per } i, j = 0, 1, \dots, N$$

In questo caso si assiste alla soppressione automatica delle differenze di evoluzione dei sistemi accoppiati, indipendentemente dal set di condizioni iniziali.

In caso di completa coincidenza delle variabili, ogni sistema non percepisce più l'effetto dell'interazione, e prosegue la sua evoluzione caotica come fosse disaccoppiato. Questo è ciò che viene chiamato *sincronizzazione completa: lo stato dei due sistemi coincide e varia caoticamente nel tempo.*

- **Sincronizzazione generalizzata:** in questo caso andiamo a considerare sistemi diversi tra loro e che quindi sono caratterizzati da dinamiche di evoluzione non identiche. In questo caso non avremo mai una perfetta coincidenza delle traiettorie però possono avvicinarsi le une alle altre : per valori di forze di accoppiamento sufficientemente grandi esiste una funzione $x_2 = F(x_1)$ tra gli stati dei due sistemi. Se si conosce esattamente lo stato del primo sistema, conoscendo il campo vettoriale F , si può ottenere lo stato del secondo sistema: questa condizione è definita come *sincronizzazione generalizzata*. Tipicamente il fenomeno descritto viene applicato ad un caso di *master-slave action*, cioè dove c'è un accoppiamento unidirezionale con un sistema (*driving*) che pilota un secondo sistema (*driven*) senza un'azione di ritorno.
- **Sincronizzazione di fase:** è un fenomeno particolarmente interessante nell'ambito di reti di oscillatori caotici, dove si ha un equilibrio comune per quanto riguarda la fase senza una correlazione tra ampiezze: nel contesto di oscillatori caotici il concetto di sincronizzazione può essere interpretato come un trasporto di fase caratterizzato dalla seguente relazione: $|n\varphi_1(t) - m\varphi_2(t)| \leq \delta$
Avendo indicato con $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$ rispettivamente le funzioni di fase dei due oscillatori accoppiati. La relazione vale anche per le rispettive frequenze dei due

oscillatori (espressione differenziale della fase).

La generalizzazione di quest'ultimo concetto porta alla sincronizzazione di fase in relazione a sistemi di oscillatori caotici accoppiati: in corrispondenza del regime sincrono di evoluzione, le fasi dei sistemi caotici interagenti risultano bloccati (*phase lock*) mentre le ampiezze variano caoticamente e risultano incorrelate. Approfondiremo di più quest'argomento nel prossimo paragrafo, con la presentazione della trasformata di Hilbert e degli indici di sincronizzazione.

- **Bounded synchronization:** prevede che l'errore di sincronizzazione (inteso come la distanza delle traiettorie dei singoli agenti della traiettoria di sincronizzazione) sia confinata in una banda di tolleranza.
- **Sincronizzazione con ritardo:** implica che la differenza tra l'uscita di un sistema al tempo t e l'uscita di un altro sistema al tempo $t+\tau$ sia asintoticamente limitata.

2.1.2 Indici di sincronizzazione

Per capire se una rete di sistemi dinamici è sincronizzata ci sono in letteratura molti indici, qui di seguito verranno presentati i due indici più importanti: *indice di sincronizzazione completa* e *indice di sincronizzazione di fase*. [1]

Per **sincronizzazione completa** si intende la perfetta coincidenza delle traiettorie sul piano delle fasi dei sistemi elementari costituenti la rete. In letteratura ci sono molti indici di sincronizzazione, quello proposto da un'informazione globale sullo stato di sincronizzazione di una rete valutando la percentuale dei sistemi la cui distanza euclidea dalla traiettoria di riferimento è inferiore ad un valore di soglia δ .

Esso è definito come:

$$\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta(\delta - d_{ip})$$

dove d_{ip} è la distanza euclidea tra lo stato di riferimento \mathbf{x}_p e lo stato dell' i -esimo nodo \mathbf{x}_i :

$$d_{ip} = \|\mathbf{x}_p - \mathbf{x}_i\|_2$$

δ è un valore di soglia opportunamente selezionato, e $\theta(x)$ è una funzione a gradino.

In caso di una perfetta sincronizzazione delle traiettorie di stato dei nodi della rete avremo $\mu(t) \rightarrow 1$, altrimenti in caso di nessuna sincronizzazione $\mu(t) \rightarrow 0$.

L'indice solitamente viene calcolato per ogni istante di tempo, per avere un'informazione globale sulla rete ne viene calcolato il valore medio $\langle \mu(t) \rangle$.

Per introdurre l'indice di **sincronizzazione di fase** bisogna introdurre il concetto di segnale analitico (e calcolo della fase tramite trasformata di Hilbert) e il *parametro d'ordine di Kuramoto*.

Dato un segnale generico $s(t)$, si definisce segnale analitico [4] $z(t)$ il segnale avente la seguente equazione:

$$z(t) = s(t) + j\hat{s}(t)$$

Dove

$$\hat{s}(t) = s(t) * \frac{1}{\pi t}$$

è detta trasformata di Hilbert.

Dal segnale analitico si riesce a ricavare la fase del segnale $s(t)$:

$$\Phi(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\hat{s}(t)}{s(t)} \right)$$

Avendo ora gli strumenti per ricavare la fase di un segnale generico possiamo introdurre il parametro d'ordine di Kuramoto [1] così da poter ottenere l'indice di sincronizzazione di fase.

Dato un insieme di oscillatori dinamicamente accoppiati *Kuramoto* definì [38] il seguente modello relativo alle dinamiche di fase dei singoli oscillatori:

$$\dot{\vartheta}_i = \omega_i + \sum_{j=1}^N \Gamma_{ij}(\vartheta_j - \vartheta_i)$$

in cui ϑ_i e ω_i sono rispettivamente fase e frequenza naturale dell' i -esimo oscillatore.

Il modello è caratterizzato da una funzione di accoppiamento non lineare del tipo:

$$\Gamma_{ij}(\vartheta_j - \vartheta_i) = \frac{K}{N} \sin(\vartheta_j - \vartheta_i)$$

che sostituita fornisce il set di equazioni che governano l'evoluzione dinamica della fase dei singoli oscillatori accoppiati:

$$\dot{\vartheta}_i = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\vartheta_j - \vartheta_i) \quad i = 1, \dots, N$$

Kuramoto intuì che per classificare le dinamiche di fase dei singoli oscillatori era conveniente definire un parametro nel piano complesso: IL PARAMETRO D'ORDINE:

$$r e^{i\psi} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\vartheta_j}$$

È una quantità macroscopica che può essere interpretato come il *ritmo collettivo* prodotto dall'intero insieme di oscillatori. Il modulo del suddetto numero complesso, $r(t)$, viene definito coerenza di fase (*phase coherence*), mentre la fase, $\psi(t)$ è la fase media (*average phase*).

In caso di sincronizzazione di fase si assiste alla convergenza ad 1 del modulo $r(t)$, mentre in caso di segnali sfasati $r(t)$ tende a 0.

2.2 Stabilità

2.2.1 Modello generale di rete

Il modello ora presentato consiste nella scrittura del sistema dinamico complessivo dell'intera rete attraverso un set di equazioni differenziali.

Come vedremo queste equazioni differenziali possono essere caratterizzati da due blocchi, uno che porta in conto le *dinamiche "proprietarie"* dei singoli agenti, e un altro che sommato al precedente caratterizza le *dinamiche di interazione* tra i singoli sistemi nodo costituenti la rete. E' particolarmente interessante notare come la topologia della rete possa determinare il comportamento di quest'ultima.

Consideriamo una rete di sistemi dinamici non lineari costituita da N nodi accoppiati ognuno dei quali è caratterizzato da un set di equazioni differenziali non lineari n-dimensionali del tipo:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i)$$

con $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ vettore di stato del sistema.

Le equazioni di stato che governano la dinamica dell'intera possono essere scritte come:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) + c \sum_{j=1}^N G_{ij} H(x_j) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad [2.1]$$

Dove $x = [x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}]^T \in \mathbb{R}^n$ sono le variabili di stato del nodo i -esimo, $f_i(x_i): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è il campo vettoriale n -dimensionale che governa le dinamiche, la costante $c > 0$ rappresenta la forza di accoppiamento (*coupling strenght*) della rete, $H(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ costituisce la funzione vettoriale d'uscita e $G_{ij}(x) \in \mathbb{R}^n$ sono gli elementi della matrice simmetrica di connettività G di dimensione $N \times N$ con somme lungo le righe nulle e termini strettamente negativi lungo la diagonale principale.

Formulando l'ipotesi di avere una rete composta da tutti elementi identici interconnessi con *accoppiamento diffusivo* (un protocollo di accoppiamento lineare), il modello può essere riscritto come:

$$\dot{x}_i = f_i(x_i) - c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j \quad i = 1, 2, \dots, N \quad [2.2]$$

dove Γ è una matrice che specifica le variabili di stato dei singoli nodi su cui è stato chiuso un *feedback-loop*. (Solitamente si assume Γ matrice diagonale con un unico elemento pari ad 1 e i restanti pari a 0), mentre l_{ij} sono gli elementi della matrice Laplaciana che descrive matematicamente la topologia della rete (se è presente un collegamento allora $l_{ij} = 1$ altrimenti $l_{ij} = 0$).

La matrice Laplaciana ha una caratteristica importante, ciò che la somma degli elementi di una qualsiasi riga i è nulla. Ciò è importante perchè implica che il $\det(L)=0$. Per tale motivo la matrice Laplaciana ha sempre un autovalore $\lambda_1=0$ a cui corrisponde l'autovettore associato $(1, 1, \dots, 1)^T$.

L'ipotesi di avere nodi identici, caratterizzati quindi dai medesimi campi vettoriali, le proprietà geometriche della matrice L e una funzione d'accoppiamento identica per ciascun nodo, garantisce l'esistenza di quello che in letteratura viene chiamato come *synchronization manifold* S , un insieme invariante per cui a regime avremo: $x_i(t) = x_s(t), \forall i$. Dunque lo studio della stabilità dello stato sincrono si riduce a quello delle

proprietà dinamiche del sistema lungo tutte le direzioni dello spazio di stato trasversali alla synchronization manifold.

2.2.2 Analisi della stabilità dello stato sincrono e l'approccio Master Stability Function

In questo paragrafo studiamo le condizioni necessarie affinché lo stato sincrono sia asintoticamente stabile prendendo in considerazione il modello con accoppiamento diffusivo (la [2.2]).

La condizione di stabilità prevede che tutti gli stati a regime siano identici per ogni istante, cioè:

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) \text{ per } t \rightarrow \infty \quad [2.3]$$

La condizione di accoppiamento diffusivo e le proprietà geometriche della matrice di accoppiamento, garantiscono che lo stato di sincronizzazione sia una soluzione $s(t) \in \mathbb{R}^n$, di ogni nodo isolato, vale cioè la relazione:

$$\dot{s}(t) = f(s(t))$$

Lo stato $s(t)$ può essere un punto di equilibrio, un'orbita periodica o anche un attrattore caotico. Chiaramente, la stabilità dello stato di sincronizzazione della rete è determinata dalle dinamiche di un nodo isolato, della forza di accoppiamento c , dalla matrice di collegamento interna Γ e dalla matrice Laplaciana L che determina la topologia della rete.

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = s(t) \quad [2.4]$$

Specificata la topologia e le dinamiche dei singoli nodi, la sincronizzabilità di una rete si dice *forte* se la rete riesce a sincronizzarsi anche con valori molto bassi della forza di accoppiamento c .

Ricordandoci della teoria della stabilità di Lyapunov, estendiamo il concetto al caso di reti di sistemi dinamici non lineari tramite il teorema di Wang & Chen:

Teorema

Consideriamo il modello della rete 2.2. Siano

$$0 = \lambda_1 > \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \dots \geq \lambda_N$$

gli autovalori della sua matrice di accoppiamento L . Supponiamo che esista una matrice diagonale $n \times n$ $\mathbf{D} > \mathbf{0}$ e due costanti $\bar{\mathbf{d}} < 0$ e $\tau > 0$, tali che

$$[Df(s(t)) + d\Gamma]^T \mathbf{D} + \mathbf{D}[Df(s(t)) + d\Gamma] \leq -\tau \mathbf{I}_n$$

[2.5]

Per tutti i valori di $d \leq \bar{d}$, dove $\mathbf{I}_n \in R^{n \times n}$ una matrice identità.

Se, inoltre, vale:

$$c\lambda \leq \bar{d},$$

lo stato di sincronizzazione [2.4] è esponenzialmente stabile.

Essendo $\lambda_2 < 0$ e $\bar{d} < 0$, la disuguaglianza [2.5] equivale a

$$c \geq \left| \frac{\bar{d}}{\lambda_2} \right|$$

Un piccolo valore di λ_2 corrisponde ad un grande valore di $|\lambda_2|$. Ciò implica che la rete può sincronizzarsi anche con una bassa forza di accoppiamento c . Quindi la sincronizzabilità della rete 2.3 nel rispetto di una specifica configurazione di accoppiamento può essere caratterizzata dal secondo più grande autovalore della corrispondente matrice Laplaciana di accoppiamento L .

Un approccio alternativo per l'analisi della stabilità dello stato sincrono della rete è quello basato sulla Master Stability Function.

Prendendo in considerazione la rete precedente, vediamo come la matrice di accoppiamento simmetrica L può essere riscritta considerando gli autovalori λ_i e v_i tale che $Lv_i = \lambda_i v_i$ e $v_j^T v_i = \delta_{ij}$. Le proprietà della matrice Laplaciana oltre ad assicurare l'esistenza della synchronization manifold S , garantiscono che tutti gli autovettori v_i associati agli autovalori λ_i ($i=2, \dots, N$), spazzano tutte le direzioni dello spazio di stato trasversali rispetto ad S .

Una condizione necessaria (ma non sufficiente) per la stabilità della synchronization manifold è che tutti gli $(N-1)n$ esponenti di Lyapunov (ognuno dei quali rappresenta il tasso di convergenza o divergenza di due traiettorie con condizioni iniziali vicine, in questo caso corrispondono alle direzioni del piano delle fasi trasversale all'iperpiano n -dimensionale $x_1=x_2=\dots=x_s$) siano tutti negativi.

Sia $\delta x_i(t) = x_i(t) - x_s(t) = [\delta x_{i1}(t), \delta x_{i2}(t), \dots, \delta x_{in}(t)]^T$ lo scostamento dell' i -esimo vettore di stato

dalla synchronization manifold, si considerino gli N vettori colonna n -dimensionali $X=(x_1, x_2, \dots, x_N)^T$ e $\delta X=(\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_N)^T$.

Si ha quindi:

$$\delta \dot{X} = [I_N \otimes Jf(x_s) + cG \otimes JH(x_s)]\delta X \quad [2.6]$$

Dove con J si intende l'operatore jacobiano caratteristico del processo di linearizzazione del sistema nell'intorno dello stato di sincronizzazione x_s .

Per ottenere un set di N equazioni completamente disaccoppiate dobbiamo diagonalizzare il sistema [2.6]. Ciò si ottiene premoltiplicando il vettore δX per la matrice Q^{-1} (con Q matrice le cui colonne sono autovettori di L), ottenendo così la seguente:

$$\delta \dot{y}_i = [Jf(x_s) - c\lambda_i JH(x_s)]\delta y_i \quad [2.7]$$

Indicando con $K_i = c\lambda_i$ ($i=2, \dots, N$) l'insieme di valori del parametro normalizzato K , le equazioni del sistema [2.7] differiscono per il solo parametro K_i . Ognuna di queste equazioni è caratterizzata quindi dagli n esponenti di Lyapunov i cui valori saranno funzione del parametro normalizzato K . L'andamento del più grande di questi esponenti determina la Master Stability Function $\Lambda(K)$.

Per $K > 0$ si possono avere tre casi (a seconda della scelta di $f(x)$ e $H(x)$):

1. $\Lambda(K)$ è una funzione monotona crescente: in questo caso per qualunque scelta di $f(x)$ e $H(x)$ la sincronizzazione non sarà mai stabile (c'è sempre un esponente di Lyapunov positivo).
2. $\Lambda(K)$ è una funzione monotona decrescente che intercetta l'asse delle ascisse in un punto $k_c > 0$. In questo caso la sincronizzazione è possibile a patto che $c > k_c / \lambda_2$.
3. $\Lambda(K)$ è una funzione che prima decresce e poi cresce intersecando due punti dell'ascissa e ammette valori negativi soltanto nell'intervallo $0 \leq k_1 < k < k_2$. E' il caso più interessante e corrisponde ad una classe di funzioni $f(x)$ e $H(x)$ molto ampia: in tal caso la stabilità è soddisfatta per i valori di c per i quali $\lambda_N / \lambda_2 < k_2 / k_1$.

2.2 Controllo

In questo paragrafo verrà introdotto il problema del controllo: in una rete è impensabile andare a controllare ogni nodo affinché abbia un andamento desiderato in quanto solitamente le reti sono composte da migliaia o addirittura milioni di nodi. Per questo

motivo si sfrutta la capacità di auto-organizzazione della rete, ovvero la sua capacità di sincronizzarsi, esercitando il controllo su un numero molto limitato di nodi: questa tecnica viene chiamata *pinning control* [2]: esso consiste nell'applicare, tramite un nodo *leader*, il controllo su uno o più nodi *pinnati*.

L'obiettivo del controllo tramite *pinning control* si raggiunge tramite l'applicazione di azioni di retroazione lineari localmente ad un insieme di nodi: si può notare come la stabilità della rete dipenderà non solo dalla forza di accoppiamento c ma anche dal guadagno di feedback che influenzerà l'autovalore λ che determina la stabilità del sistema: più è piccolo λ , più sarà grande $|\lambda|$, più la rete può stabilizzarsi con una forza di accoppiamento molto piccola.

Inoltre si può ottenere un'informazione quantitativa e qualitativa dell'azione di controllo tramite la *pinning controllability*: essa valuta la scelta di controllo in termini di *forza* dell'azione di controllo richiesta, del numero di nodi leader e degli effetti che un'assegnata topologia di anelli di retroazione può avere sul comportamento complessivo dell'intera rete.

Esistono differenti strategie di selezioni dei nodi da *pinnare*:

- **Random pinning:** in cui i nodi sono selezionati in maniera del tutto casuale (*random*) con uniforme probabilità di selezione.
- **Pinning selettivo:** in cui si seguono criteri di selezione dei nodi direttamente controllati.

Inoltre per applicare la Master Stability Function al sistema controllato (in cui lo stato di sincronizzazione viene scelto a proprio) bisogna considerare il metodo esteso con dove la matrice non sarà soltanto composta dagli elementi della matrice Laplaciana ma anche dagli elementi di controllo.

Capitolo 3

Simulazione della rete: Circuito di Chua

In questo capitolo verrà illustrata la simulazione di una rete di sistemi dinamici caotici non lineari in cui ogni nodo sarà un circuito di Chua. Verrà analizzato quindi prima il circuito di Chua e le sue caratteristiche, successivamente verranno preso in considerazione due circuiti di Chua accoppiati, e infine verrà analizzato il caso di 4 circuiti di Chua con varie topologie di rete dove verranno calcolati gli indici di sincronizzazione ottenuti da dati sperimentali [3].

Verrà preso in considerazione nelle simulazioni il modello matematico *adimensionale* del circuito di Chua mentre il modello fisico e matematico dimensionale verrà soltanto illustrato.

3.1 Circuito di Chua

Prima di parlare del circuito di Chua [2] dobbiamo introdurre il concetto di sistema dinamico caotico.

Un sistema dinamico è detto caotico se presenta le seguenti caratteristiche:

- Sensibilità alle condizioni iniziali: ad una variazione infinitesima delle condizioni al contorno corrispondono variazioni finite in uscita.
- Imprevedibilità: non si può prevedere in anticipo l'andamento del sistema su tempi lunghi rapportati al suo tempo caratteristico, a partire da assegnate condizioni al contorno.

Prima del 1983 nessun circuito elettronico era riuscito a mostrare un andamento caotico. Solo nel 1984 il prof. Matsumoto riuscì a dimostrare tramite simulazioni al calcolatore, la caoticità di un circuito realizzato nel 1983 dal prof. Leon O. Chua., docente dell'università della California, e da lui stesso battezzato circuito di Chua.

Questo circuito è un oscillatore non lineare definito come “*universal paradigm of chaos*” proprio perchè è l'unico circuito autonomo in cui la presenza di caos è stata provata in maniera analitica.

Esso, infatti, presenta tutte le caratteristiche di un sistema dinamico caotico:

- è molto sensibile alle condizioni iniziali;
- le traiettorie sull'attrattore rimangono confinate in una regione limitata nello spazio di stato;
- l'attrattore contiene un infinito numero di orbite instabili periodiche che costituiscono il suo scheletro e sono studiate durante l'evoluzione del circuito;
- il circuito esibisce oscillazioni aperiodiche e così ha un comportamento imprevedibile a lungo termine;
- il circuito ha uno spettro a banda larga.

Le principali ragioni del suo successo sono quindi la semplicità e robustezza di modello sperimentale del caos, facilità di implementazione, dimostrazione di caoticità tramite analisi matematica e presenza di fenomeni non-lineari.

3.1.1 Modello fisico e matematico dimensionale e adimensionale

In letteratura ci sono tante versioni e implementazioni del circuito di Chua, quella che verrà illustrata sarà la più semplice e robusta, fatta cioè con due condensatori, un induttore, un resistore e un resistore non lineare, chiamato diodo di Chua.

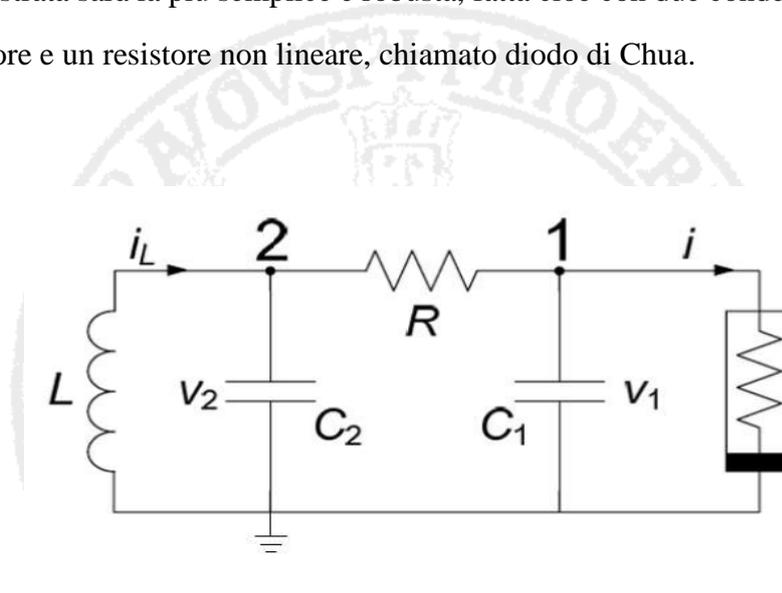


Fig.3.1

Mentre i condensatori, l'induttore e il resistore sono componenti elettrici standard, resistore non lineare necessita di una trattazione *ad hoc*: la sua caratteristica sul piano $i-v$ è

formata da una curva lineare a tratti come mostrato in figura 3-2.

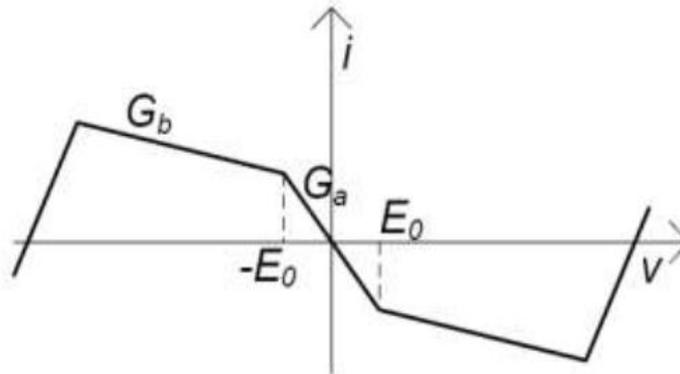


fig.3-2

Il suo modello matematico dimensionale si può ottenere applicando le leggi di Kirchoff al circuito in figura 4-1, ed è il seguente:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{c_1} [G(v_2 - v_1) - g(v_1)]$$

$$\frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{c_2} [G(v_1 - v_2) + i_L]$$

$$\frac{di_L}{dt} = -\frac{1}{L} v_2$$

Dove $G=1/R$, v_1 v_2 i_L sono rispettivamente le tensioni ai capi dei rispettivi condensatori, e la corrente nell'induttore, mentre con $g(v_1)$ si indica la caratteristica non lineare del diodo di Chua:

$$g(v_R) = \begin{cases} G_b v_R + (G_b - G_a)E_0, & \text{se } v_1 \leq -E_0 \\ G_a v_R, & \text{se } |v_1| \leq E_0 \\ G_b v_R + (G_a - G_b)E_0, & \text{se } v_1 \geq E_0 \end{cases}$$

In cui G_a è la pendenza del segmento interno della caratteristica mentre G_b è la pendenza dei segmenti esterni.

A questo punto possiamo adimensionalizzare il sistema in modo da ottenere delle espressioni più maneggevoli.

Ponendo:

$$x = \frac{v_1}{E_0} \quad y = \frac{v_2}{E_0} \quad z = \frac{i_L}{E_0 G} \quad \tau = \frac{tG}{C_2}$$

$$a = \frac{G a}{G} \quad b = \frac{G b}{G} \quad \alpha = \frac{C_2}{C_1} \quad \beta = \frac{C_2}{(L G^2)}$$

Le equazioni possono essere così riscritte:

$$\dot{x} = \alpha(y - x - f(x))$$

$$\dot{y} = x - y + z$$

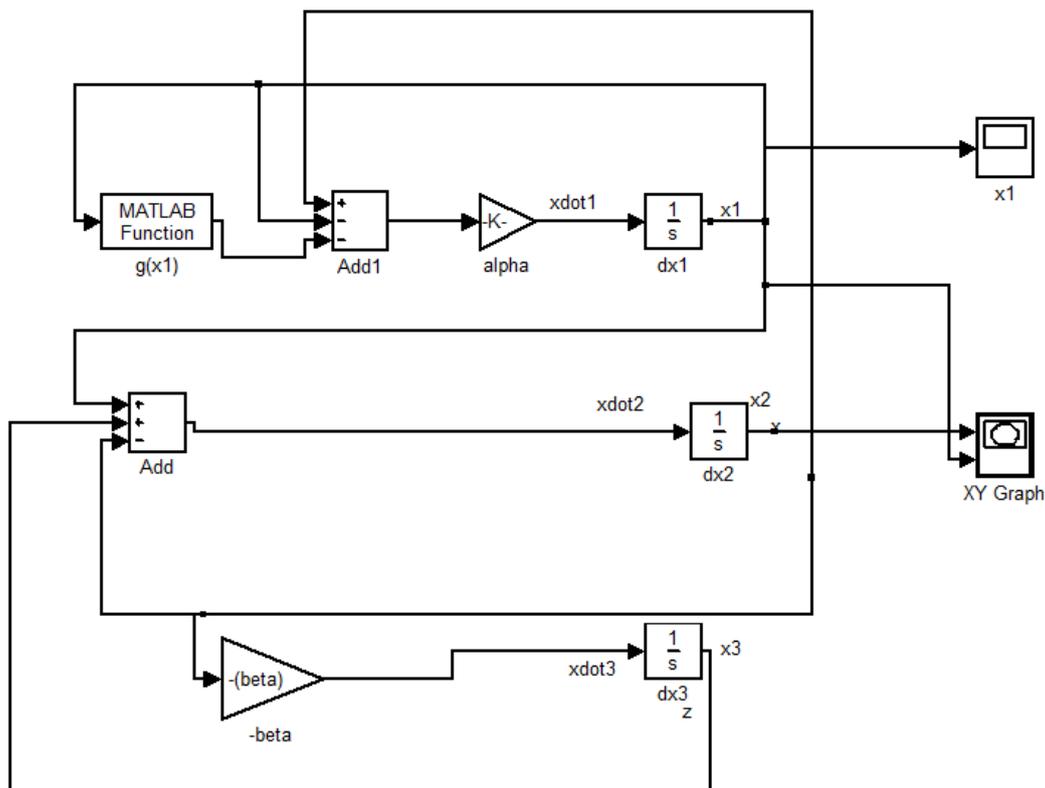
$$\dot{z} = -\beta y$$

$$f(x) = \begin{cases} bx + b - a, & \text{se } x \leq -1 \\ ax, & \text{se } |x| < 1 \\ bx + a - b, & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

Con $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ parametri di biforcazione mentre

è la funzione non lineare a tratti.

Per simulare il circuito di Chua è stato creato il seguente modello in SIMULINK:



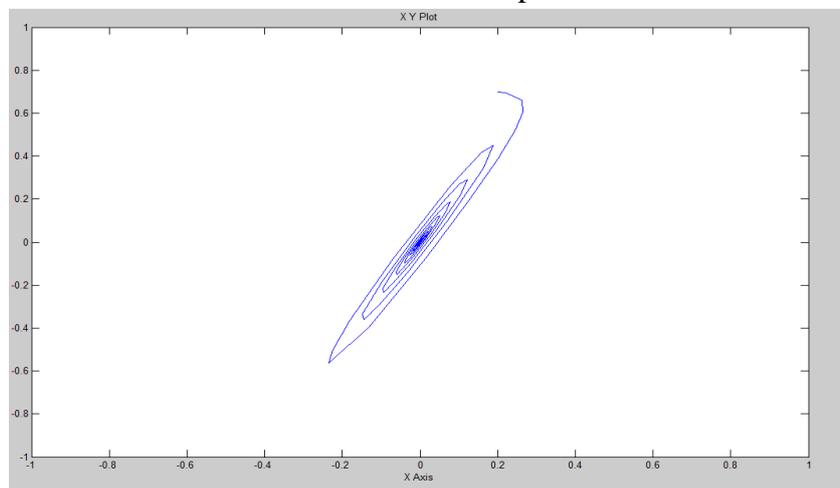
Dove il blocco Matlab Function richiama la seguente funzione MATLAB:

```
function [ out ] = anlf( in )
%UNTITLED Summary of this function goes here
% Detailed explanation goes here
x=in;
a=-1.36;
b=-0.73;

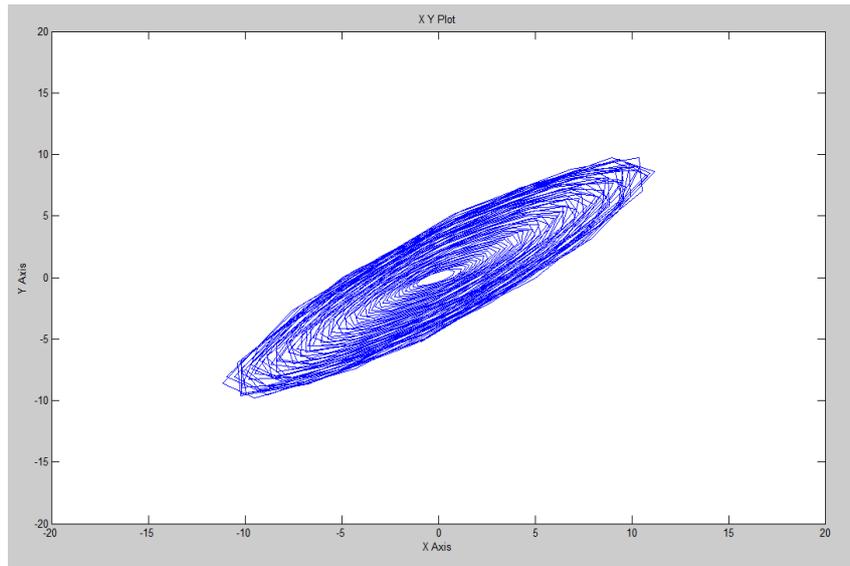
if x <-1 || x==-1
    out=b*x+b-a;
elseif abs(x)< 1
    out=a*x;
elseif x >1 || x==1
    out=b*x+a-b;
end
```

La caratteristica x-y (cioè quella appartenente agli stati dei due condensatori) dipende principalmente dal valore di a e b.

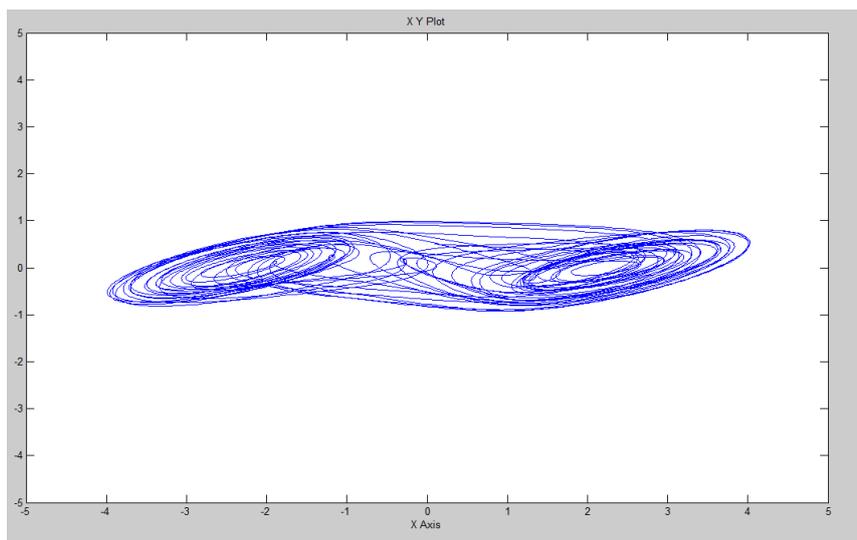
Per $a=1.36$ e $b=0.73$ la curva si stabilizza su un punto:



Per $a=-0.736$ e $b=-0.273$ iniziamo a notare come lo stato non è più stabile su un punto ma su un'orbita detta ciclo limite 1T:



Per $a=-1.36$ e $b=-0.73$ abbiamo il cosiddetto attrattore Double Scroll



3.2 Circuiti di Chua accoppiati

Ora prendiamo in esame due circuiti di Chua accoppiati [1].

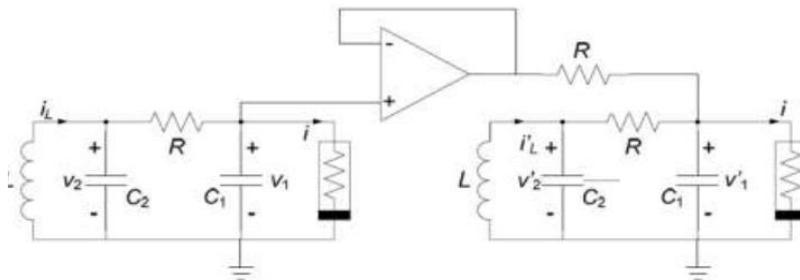
L'accoppiamento di due circuiti di Chua può essere di 2 tipi:

1. Accoppiamento direzionale (realizzata per fornire alla rete lo stato di riferimento)
2. Accoppiamento non direzionale (caratteristica della rete da controllare)

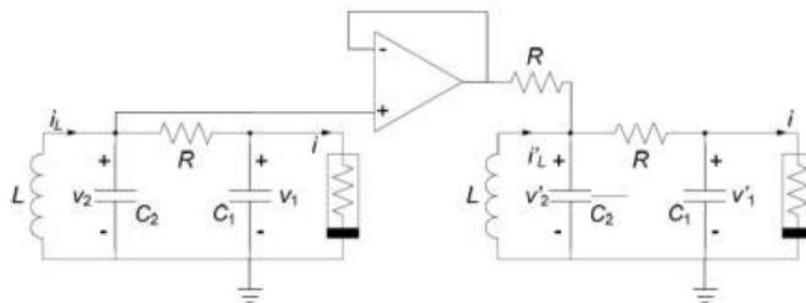
A loro volta questi due tipi di circuiti accoppiati possono essere divisi in altri due tipi:

1. Accoppiamento sul primo condensatore (accoppiamento su x);
2. Accoppiamento sul secondo condensatore (accoppiamento su y);

Nell'accoppiamento direzionale viene utilizzato un amplificatore operazionale che opera in modalità *voltage-follower* (come possiamo vedere in figura) per ottenere l'unidirezionalità. Quindi potremmo avere il caso accoppiamento direzionale sul primo condensatore (caso 1-1), avremo:



Oppure il caso di accoppiamento direzionale sul secondo condensatore (caso 1-2):



Le equazioni che caratterizzano questi due circuiti sono:

Pilotato da x

$$\dot{x} = \alpha(y - x - h(x))$$

$$\dot{y} = x - y + z$$

$$\dot{z} = -\beta y$$

$$\dot{x}' = \alpha(y' - x' - h(x')) + k_x(x - x')$$

$$\dot{y}' = x' - y' + z'$$

$$\dot{z}' = -\beta y'$$

Pilotato da y

$$\dot{x} = \alpha(y - x - h(x))$$

$$\dot{y} = x - y + z$$

$$\dot{z} = -\beta y$$

$$\dot{x}' = \alpha(y' - x' - h(x'))$$

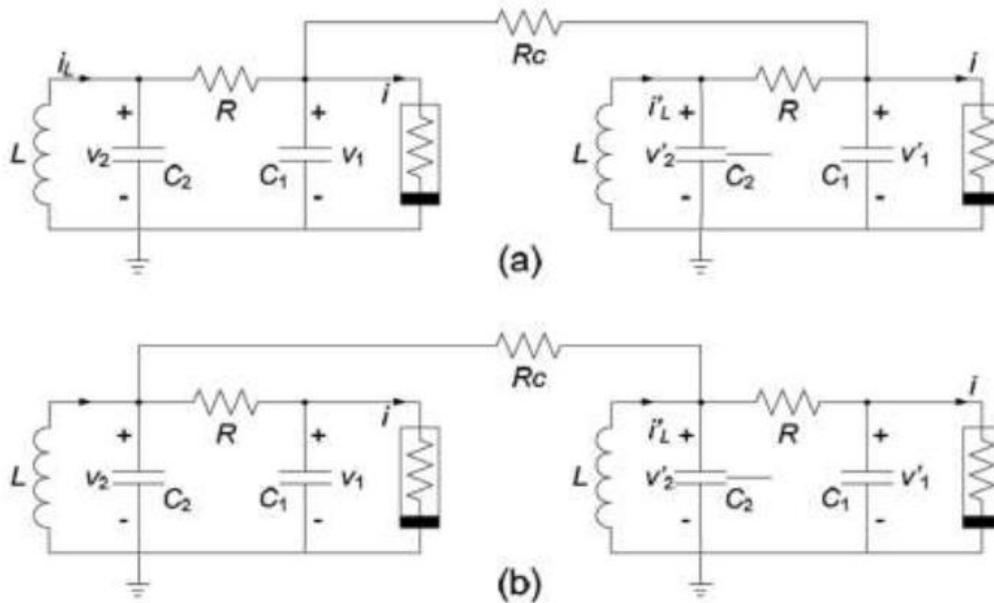
$$\dot{y}' = x' - y' + z' + k_y(y - y')$$

$$\dot{z}' = -\beta y'$$

Questi circuiti possono raggiungere la sincronizzazione in quanto gli esponenti di Lyapunov del sistema hanno parte reale negativa, a differenza di un eventuale collegamento sull'induttore dove gli esponenti sono a parte reale positiva e quindi non si può raggiungere la sincronizzazione.

Nel caso di accoppiamento non direzionale viene invece utilizzato soltanto un resistore che permette l'accoppiamento o meno dei due circuiti.

Possiamo quindi avere accoppiamento non direzionale sul primo condensatore (caso 2-1 figura a) oppure un accoppiamento non direzionale sul secondo condensatore (caso 2-2 figura b):



Le equazioni di stato che caratterizzano i seguenti circuiti sono:

Accoppiamento rispetto ad x

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x - h(x)) + k_x(x' - x) \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y \end{aligned}$$

Accoppiamento rispetto ad y

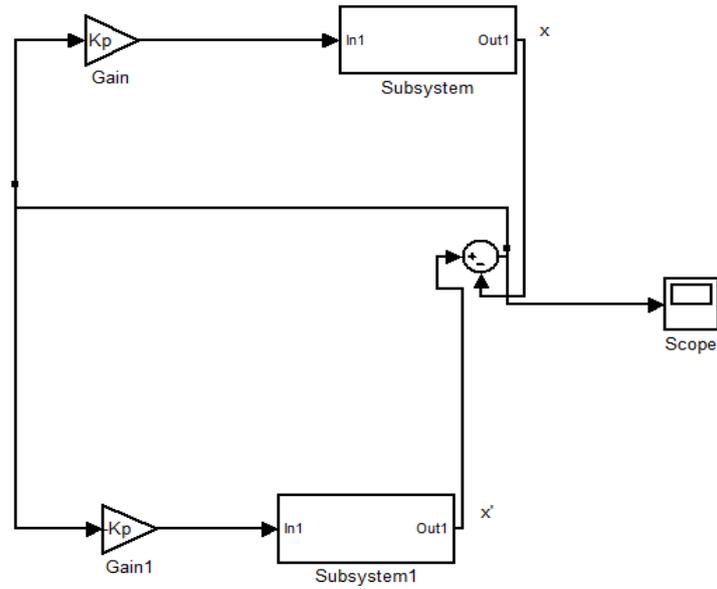
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - x - h(x)) \\ \dot{y} &= x - y + z + k_y(y' - y) \\ \dot{z} &= -\beta y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \alpha(y' - x' - h(x')) + k_x(x - x') \\ \dot{y}' &= x' - y' + z' \\ \dot{z}' &= -\beta y' \end{aligned}$$

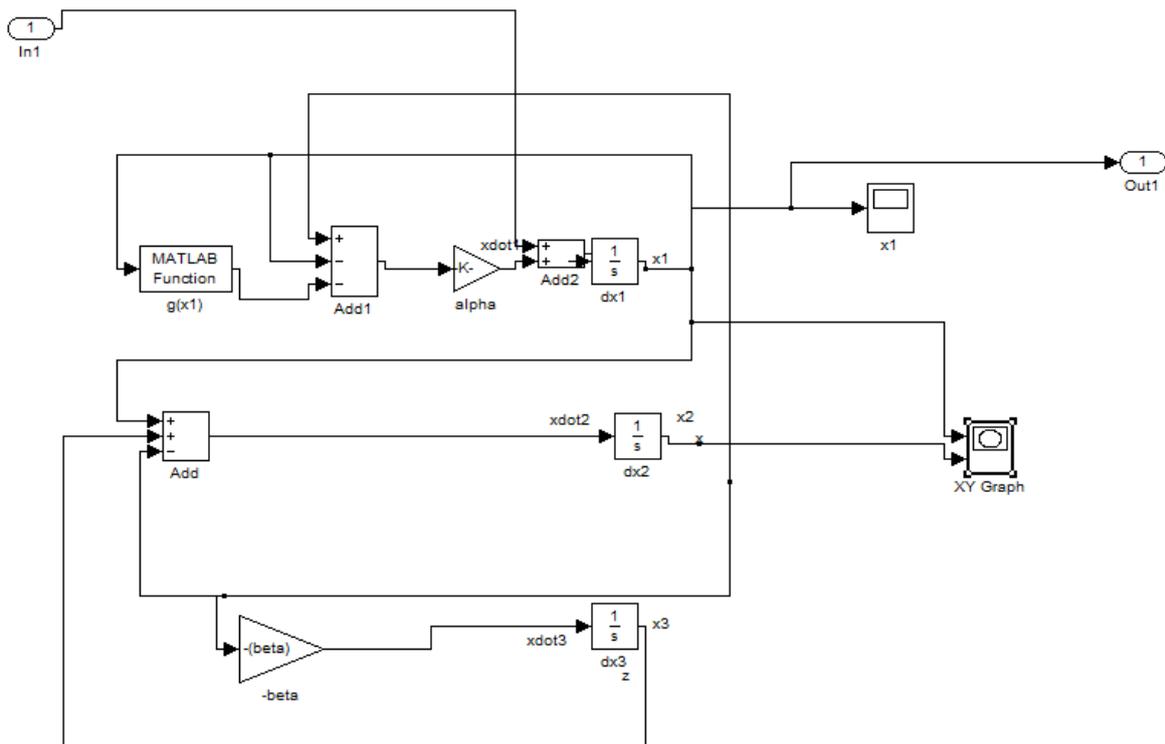
$$\begin{aligned} \dot{x}' &= \alpha(y' - x' - h(x')) \\ \dot{y}' &= x' - y' + z' + k_y(y - y') \\ \dot{z}' &= -\beta y' \end{aligned}$$

Come nel caso direzionale, anche qui non si può ottenere la sincronizzazione nel caso in cui i due circuiti sono collegati tramite induttore.

Lo schema in SIMULINK di due circuiti accoppiati (tipo non direzionale su x) è il seguente:

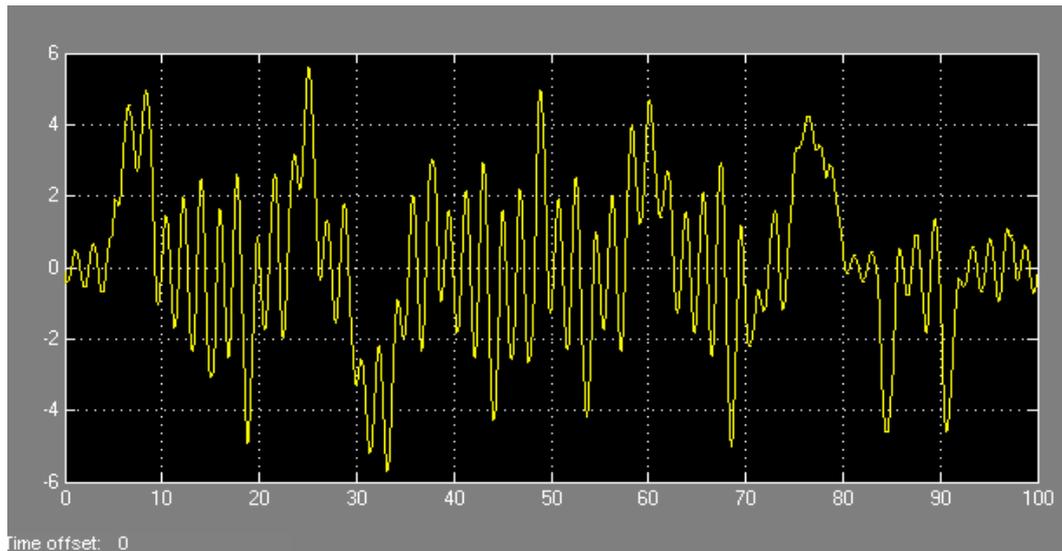


Dove il sottosistema (identico per entrambi i blocchi) è il seguente:

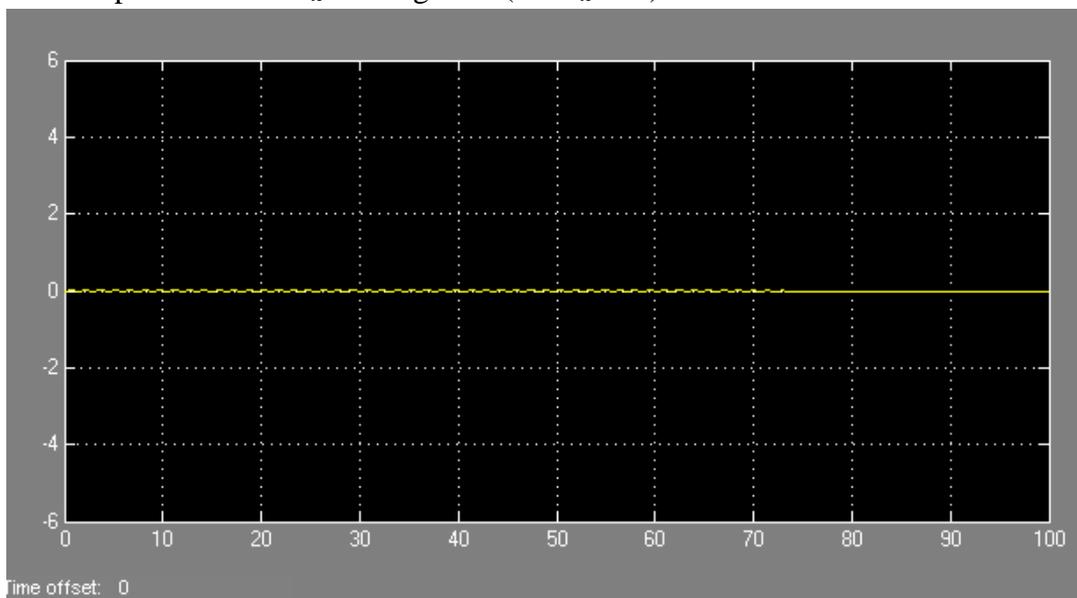


Vediamo ora la sincronizzazione tra i due circuiti intesa come differenza tra lo stato x e x' .

Si nota che per valori di K_x molto piccoli (es. $K_x = 0.3$) non c'è sincronizzazione:



Mentre per valori di K_x molto grandi (es. $K_x = 30$) c'è sincronizzazione:



In seguito il calcolo della sincronizzazione avverrà tramite indici di sincronizzazione (vedi 2.1.2).



3.3 Rete di 4 circuiti di Chua

Consideriamo ora una rete di 4 circuiti di Chua. Le possibili topologie della rete che si possono ottenere sono varie, tra cui:

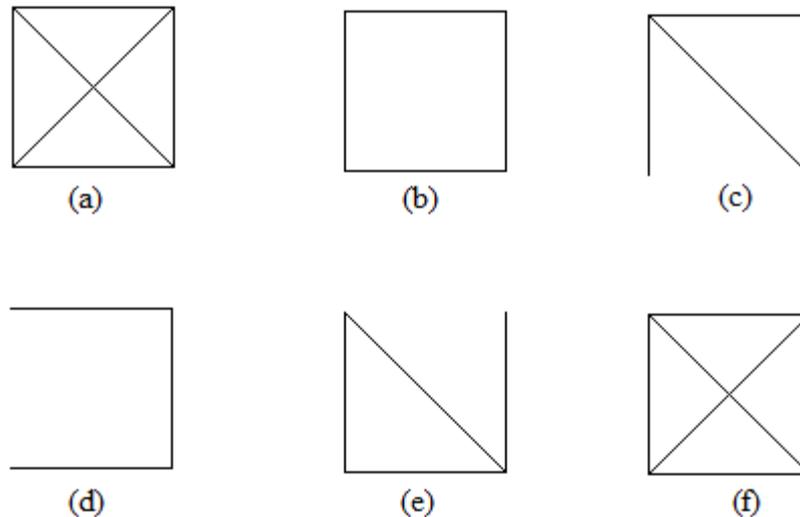


fig.3.3

Verranno analizzati gli indici di sincronizzazione della rete per diversi valori della forza di accoppiamento [3]. I dati da cui verranno estratti gli indici sono dati sperimentali ricavati dalla rete fisica tramite Labview (ovviamente prima del calcolo degli indici è stata effettuata la conversione dei dati dimensionali a dati adimensionali).

Prima di parlare di tutte le topologie di rete in figura, introduciamo le equazioni che caratterizzano una rete ad n circuiti di Chua.

Una rete ad n circuiti di Chua ha le equazioni di stato che sono così esprimibili:

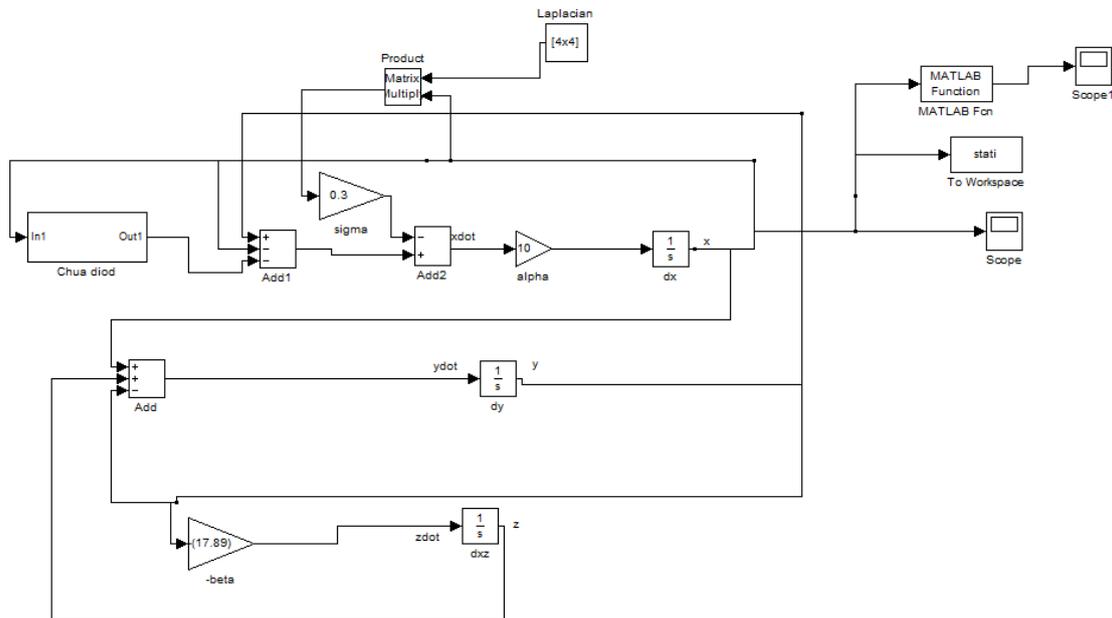
$$\dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) - c \sum_{j=1}^N l_{ij} \Gamma x_j$$

$$\dot{y} = x - y + z$$

$$\dot{z} = -\beta y$$

$$\sigma = \frac{c_2 R}{c_1 R_c}$$

Un modello Simulink che può simulare una rete di n circuiti di Chua è la seguente:



3.3.1 Topologia A: globally connected

Nella topologia globally connected (figura 3.3 (a)) tutti i nodi sono collegati tra loro.

La matrice laplaciana è la seguente :

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La tabella mostra i valori degli indici di sincronizzazione al variare della forza di accoppiamento:

TABELLA TOPOLOGIA A						
Forza di accoppiamento σ	Indice di sincronizzazione di fase	Indice di sincronizzazione completa rispetto a:				
		x1	x2	x3	x4	Media
0.82	[0.007;0.26]	0.0155	0.0204	0.0184	0.0145	0.0172
0.98	[0.008;0.29]	0.0173	0.0195	0.0211	0.0160	0.0185
1.22	[0.0015;0.3173]	0.0157	0.0248	0.0236	0.0175	0.0376
1.3	[0.8;0.9]	0.0208	0.0260	0.0847	0.0251	0.0378
1.65	1	0.5379	0.5363	0.3385	0.3348	0.4369
2.43	1	0.9289	0.9099	0.9616	0.8540	0.8386
4.86	1	1	1	1	1	1

169.66	1	1	1	1	1	
--------	---	---	---	---	---	--

Come possiamo notare si raggiunge prima una sincronizzazione di fase e poi una sincronizzazione completa.

3.3.2 Topologia B: neighbor connected

Nella topologia neighbor connected (figura 3.3 (b)) i nodi sono connessi soltanto ai loro vicini.

La matrice laplaciana è la seguente :

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La tabella mostra i valori degli indici di sincronizzazione al variare della forza di accoppiamento:

TABELLA TOPOLOGIA B						
Forza di accoppiamento σ	Indice di sincronizzazione di fase	Indice di sincronizzazione completa rispetto a:				
		x1	x2	x3	x4	Media
1.6	[0.039;0.3177]	0.0084	0.0085	0.0077	0.0068	0.0078
1.78	[0.018;0.3211]	0.0079	0.0088	0.0065	0.0064	0.0074
2.14	[0.8410;9690]	0.0237	0.0167	0.0161	0.0229	0.0198
3.28	1	0.6573	0.5731	0.6391	0.5247	0.5985
4.35	1	0.9237	0.8524	0.9359	0.8187	0.8827
10.51	1	1	1	1	1	1

Se facciamo un confronto con la topologia A (globally connected) la sincronizzazione in quest'ultima si raggiunge con valori di forza di accoppiamento molto più piccoli rispetto alla topologia B (neighbor connected).

3.3.3 Topologia C: one-to-all connected

Nella topologia one-to-all connected (figura 3.3 (c)) un unico nodo è connesso agli altri.

La matrice laplaciana è la seguente :

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La tabella mostra i valori degli indici di sincronizzazione al variare della forza di accoppiamento:

TABELLA TOPOLOGIA C						
Forza di accoppiamento σ	Indice di sincronizzazione di fase	Indice di sincronizzazione completa rispetto a:				
		x1	x2	x3	x4	Media
1.6	[0.28;0.44]	0.0053	0.0051	0.0025	0.0023	0.0038
1.78	[0.29;0.45]	0.0083	0.0041	0.0028	0.0056	0.0052
2.14	[0.33;0.46]	0.0095	0.0068	0.0064	0.0072	0.0075
3.28	[0.35;0.53]	0.0112	0.0071	0.0068	0.0083	0.0334
4.35	[0.84; 0.96]	0.0219	0.0159	0.0153	0.0157	0.0172
6.9	1	0.7319	0.5139	0.6744	0.5220	0.6105
25.6	1	1	1	1	1	1

Questa topologia necessita di una forza di accoppiamento superiore (rispetto alle topologie A e B) per la sincronizzazione di fase e la sincronizzazione completa.

3.3.4 Topologia D: neighbor connected-less-one-couple

Nella topologia neighbor connected-less-one-couple (figura 3.3 (d)) i nodi vicini sono collegati tra loro meno che una coppia di nodi.

La matrice laplaciana è la seguente :

$$L = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

La tabella mostra i valori degli indici di sincronizzazione al variare della forza di accoppiamento:

TABELLA TOPOLOGIA D						
Forza di accoppiamento σ	Indice di sincronizzazione di fase	Indice di sincronizzazione completa rispetto a:				
		x1	x2	x3	x4	Media
1.6	[0.0008;0.98] (figura 3.4)	0.0179	0.0148	0.0143	0.0187	0.0164
4.84	[0.5;0.78]	0.0101	0.0135	0.0145	0.0107	0.0122
13.34	1	0.7653	0.8664	0.8812	0.7401	0.8132
33.24	1	1	1	1	1	1

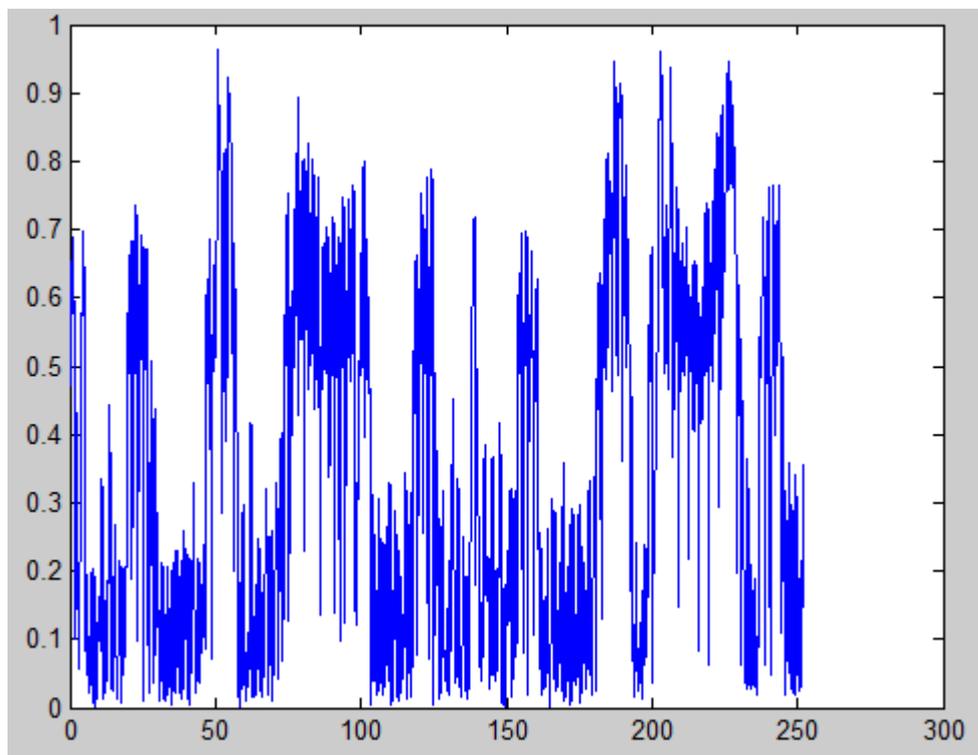


Fig. 3.4

3.3.5 Topologia E

Nella topologia E (figura 3.3 (e)) 3 nodi sono collegati tutti tra loro e un quarto nodo e collegato ad uno solo di questi tre.

La matrice Laplaciana è la seguente :

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

La tabella mostra i valori degli indici di sincronizzazione al variare della forza di accoppiamento:

TABELLA TOPOLOGIA E						
Forza di accoppiamento σ	Indice di sincronizzazione di fase	Indice di sincronizzazione completa rispetto a:				
		x1	x2	x3	x4	Media
1.6	[0.45;0.98] (figura 3.5)	0.0176	0.0144	0.0207	0.0175	0.0191
3.58	[0.5;0.92]	0.0355	0.0100	0.0235	0.0311	0.0250
6.48	1	0.8360	0.6033	0.8717	0.8177	0.7821
14.38	1	1	1	1	1	1

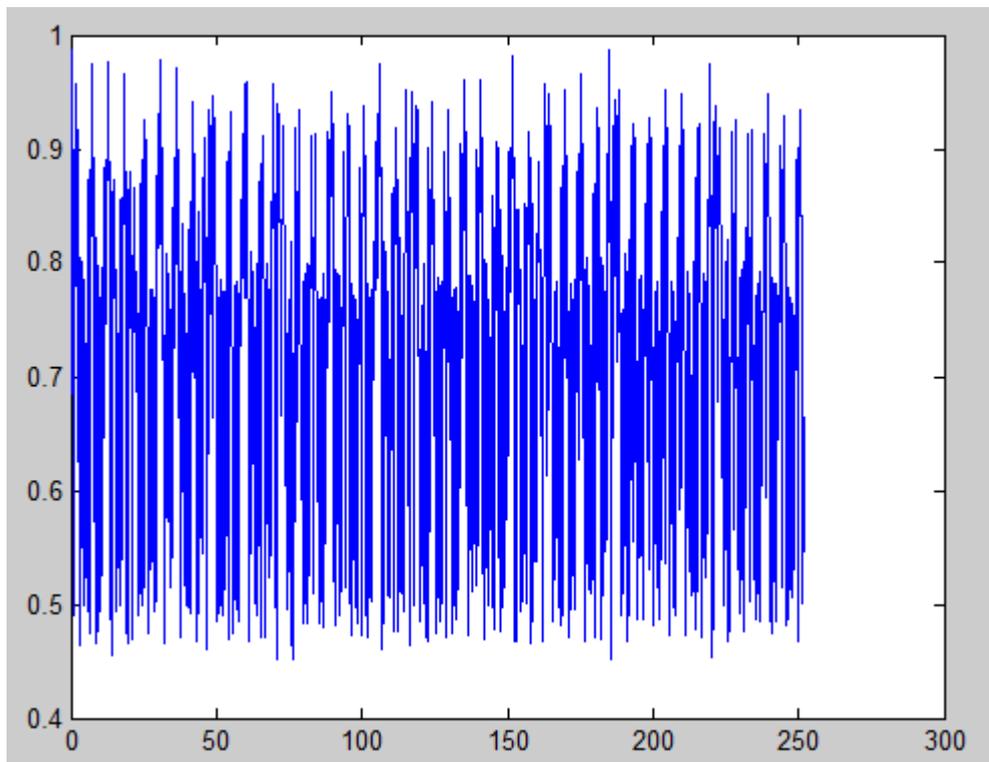


Fig. 3.5

3.3.6 Topologia F: globally connected-less-one-couple

Nella topologia globally connected less one couple (figura 3.3 (f)) tutti i nodi sono

connessi tra loro tranne una coppia.

La matrice Laplaciana è la seguente :

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

La tabella mostra i valori degli indici di sincronizzazione al variare della forza di accoppiamento:

TABELLA TOPOLOGIA F						
Forza di accoppiamento σ	Indice di sincronizzazione di fase	Indice di sincronizzazione completa rispetto a:				
		x1	x2	x3	x4	Media
1.6	[0.5;0.8]	0.3420	0.0107	0.3420	0.0107	0.1763
3.28	1	0.6932	0.4849	0.6931	0.4256	0.5742
10.53	1	1	1	1	1	1

3.3.7 Confronto tra le topologie

Di seguito una tabella in cui possiamo confrontare per quali valori le varie topologie illustrate si sincronizzano :

Topologie rete	Forza di accoppiamento σ	
	Sincronizzazione di fase	Sincronizzazione completa
A	1.65	4.86
B	3.28	10.51
C	6.9	25.6
D	13.34	33.24
E	6.48	14.38
F	3.28	10.53

Come possiamo notare la sincronizzazione (sia di fase che completa) con la topologia A avviene per valori molto bassi della forza di accoppiamento, mentre valori molto alti per ottenere sincronizzazione li riscontriamo nella topologia D.

Conclusioni

In questo trattato si è discusso della rete e della possibilità di poter creare un modello matematico che descriva la sua topologia, modello matematico che è molto importante nell'ottenere informazioni sulla sincronizzazione e la stabilità della rete stessa.

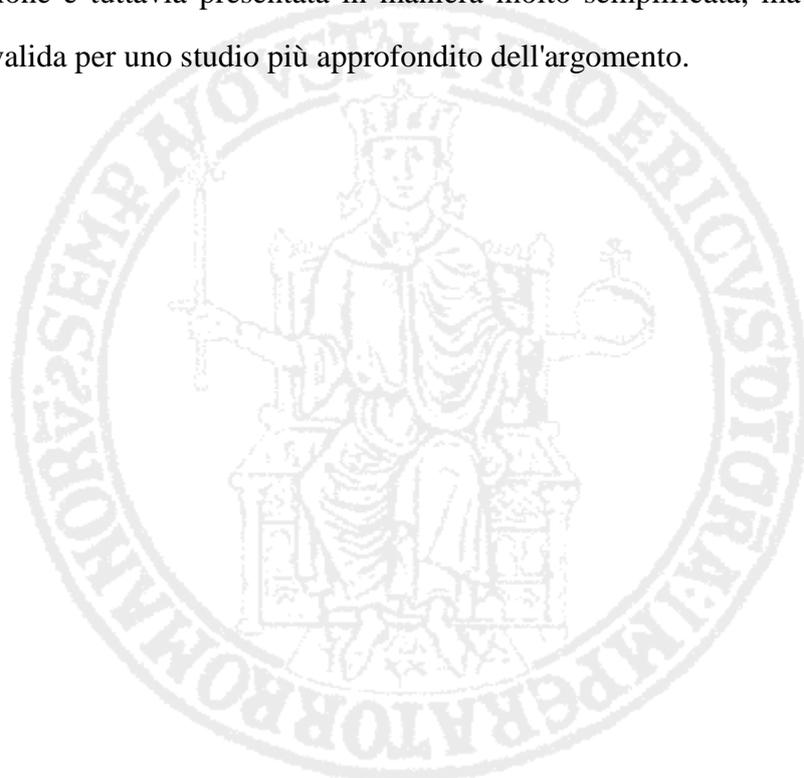
Inoltre sono stati esposti i concetti di sincronizzazione, sono state illustrate varie tipologie di sincronizzazione e introdotti indici che calcolassero quantitativamente la sincronizzazione nella rete.

E' stato introdotto il concetto di stabilità ed enunciato il metodo della Master Stability Function che ci permette di sapere se gli stati della rete portano a stabilità o instabilità. Inoltre è stato accennato il concetto di controllo della rete con il pinning control.

Si è successivamente presentato il circuito di Chua, circuito principe della simulazione di sistemi caotici, e ne sono stati introdotti i modelli dimensionali e adimensionali.

Si è poi passato ad un concetto rudimentale di rete con l'accoppiamento (collegamento) tra due circuiti di Chua, ed infine è stato ampiamente discussa la sincronizzazione in una rete formata da 4 circuiti di Chua con 6 topologie differenti e ne è stato fatto un confronto.

La trattazione è tuttavia presentata in maniera molto semplificata, ma risulta comunque una base valida per uno studio più approfondito dell'argomento.



Bibliografia

- [1] Cupini, 2011, "Sincronizzazione e controllo di reti di sistemi caotici" , Università degli studi di Napoli Federico II Dipartimento di Informatica e Sistemistica , pp.1-227,2011
- [2] M. Di Bernardo, M. De Magistris ,E. Di Tucci, S. Manfredi, "Synchronization of Networks of Non-Identical Chua's Circuits: Analysis and Experiments" , vol. 59, pp 1029-1041
- [3] M. Di Bernardo, M. De Magistris, C.Petrarca, "Experimental Characterization of Synchronization in Networks of Non-Linear Oscillators with Dynamic Links", Dipartimento di Ingegneria Elettrica e Dipartimento di Informatica e Sistemistica dell'Università degli studi di Napoli Federico II, pp. 4
- [4] J.Proakis, M.Salehi, "Communication System Engineering 2nd Ed", Pearson Education , pp.51-53

